Εκτιμητική

> Εκτίμηση σε σημείο

1. Έστω τ.δ από $f(x;\vartheta) = Q(\underset{\sim}{\vartheta})K(x), Q(\underset{\sim}{\vartheta}) > 0, \vartheta_1 < x < \vartheta_2, \vartheta_1, \vartheta_2 > 0$.Να βρεθεί επαρκής σ.σ για την παράμετρο $\underset{\sim}{\vartheta} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}$.

! Παραγοντικό κριτήριο

2. Έστω τ.δ από $P(\vartheta)$.

i. Να δειχθεί ότι η σ.σ $T(\underset{\sim}{X}) = 2^{\sum X_i}$ είναι ΑΟΕΔ της $g(\vartheta) = e^{n\vartheta}$.

ii. Να δειχθεί ότι η σ.σ $U(\underset{\sim}{X}) = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\sum X_i}$ είναι ΑΟΕΔ της $\phi(\vartheta) = e^{a\vartheta}, a \in \mathbb{R}$

! $\sum X = n\bar{X}$

3. Έστω τ.δ από $N(\mu, \vartheta^2), \mu \in \mathbb{R}, \vartheta > 0$.

Να δειχθεί ότι η σ.σ $T(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\sum |X_i - \mu|\right)$ είναι αμερόληπτη για την παράμετρο ϑ . *

!

4. Έστω τ.δ από σ.π.π που ορίζεται ως εξής

$$f(x;\vartheta) = \begin{cases} e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^x}{x!}, x = 0,1,2 \\ 1 - \sum\left(e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^x}{x!}\right), x = 3, \vartheta > 0 \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η σ.σ $T(\underset{\sim}{X}) = \sum X_i$ **δ**εν είναι επαρκής για την παράμετρο ϑ . *

5. Έστω τ.δ από $P(\vartheta)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ για την $\Pr\left(\sum X = 0\right)$

! $\sum X \sim ?$

* **Γ**ενίκευση : Να βρεθούν ΑΟΕΔ για τις

$$\Pr\left(\sum X = s\right),$$
$$\Pr\left(\sum X \le s\right) \;\&\; \Pr\left(\sum X \ge s\right),$$
$$\Pr\left(s_1 \le \sum X \le s_2\right)$$

6. Έστω τ.δ από $f(x;\vartheta) = \exp\{-(x-\vartheta)\} I_{(\vartheta,\infty)}(x), \vartheta > 0$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της $g(\vartheta) = \Pr(X \ge c)$ αφού πρώτα βρεθεί επαρκής σ.σ για την παράμετρο ϑ . *

7. Έστω τ.δ από $N(\vartheta_1, \vartheta_2)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της $g(\vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 \cdot \vartheta_2^{-1/2}$

8. Έστω τ.δ από $N\left(\vartheta,\vartheta^2\right)$. Να δειχθεί ότι η σ.σ $T(\underset{\sim}{X})=\begin{pmatrix}\sum X_i\\ \sum X_i^2\end{pmatrix}$ είναι επαρκής αλλά όχι πλήρης για την παράμετρο ϑ.

Επίσης, να βρεθούν αμερόληπτοι εκτιμητές για τις ϑ,ϑ^2.

Υπάρχουν ΑΟΕΔ ?

9. Έστω δύο ανεξάρτητα τ.δ από τις $Exp(\vartheta_1)$ και $Exp(\vartheta_2)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της $g(\vartheta_1,\vartheta_2)=\dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$. Αν οι παράμετροι ήταν $\dfrac{1}{\vartheta_1}$ και $\dfrac{1}{\vartheta_2}$ θα άλλαζε κάτι ?

10. Έστω μια διακριτή σ.π και ένα τ.δ μεγέθους n από αυτή. Έστω και μια σ.σ $T=\left(X_1,X_2,..,X_q\right)', q<n$. Είναι αυτή η σ.σ επαρκής για την παράμετρο ϑ ?

11. Έστω δύο ανεξάρτητα δείγματα από $N\left(\vartheta_1,\sigma^2\right)$ και $N\left(\vartheta_2,\sigma^2\right)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ για την $\vartheta=\left(\vartheta_1,\vartheta_2,\sigma^2\right)'$.

12. Έστω τ.δ από $\mathcal{U}(\vartheta,\beta),\vartheta<\beta$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ της πρώτης και δέυτερης ροπής της κατανομής.

13. Έστω δύο ανεξάρτητα δείγματα από $f(x;\vartheta_1)$ και $f(y;\vartheta_2)$. Αν οι σ.σ T_1,T_2 είναι επαρκείς και πλήρεις για τις παραμέτρους αντίστοιχα ,να δείξετε ότι η σ.σ $\underset{\sim}{T}^*=(\underset{\sim}{T_1},\underset{\sim}{T_2})'$ είναι επαρκής και πλήρης για την $\underset{\sim}{\vartheta}=(\underset{\sim}{\vartheta_1},\underset{\sim}{\vartheta_2})'$.

14. Έστω τ.δ από την $\mathcal{U}(\vartheta_1,\vartheta_2),\vartheta<\vartheta_2$. Να βρεθούν ΑΟΕΔ για την $g(\vartheta_1,\vartheta_2)=\dfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}$ και την $g(\vartheta_1,\vartheta_2)=\vartheta_2-\vartheta_1$.

15. Έστω τ.δ από $\mathcal{G}(\vartheta_1,\vartheta_2)$. Να βρεθεί ΕΜΠ των παραμέτρων όταν

- **i.** ϑ_1 γνωστό
- **ii.** ϑ_2 γνωστό
- **iii.** ϑ_1,ϑ_2 άγνωστα

16. Έστω τ.δ από $\mathcal{U}(\vartheta-a,\vartheta+a),\vartheta\in\mathbb{R}$ και σ.σ που ορίζεται ως εξής

$$\hat{\vartheta}_j:=X_{(n)}-a+\sigma\upsilon\nu^2X_j\left(X_{(1)}-X_{(n)}+2a\right), j=1,2,...n$$

Να δειχθεί ότι η $\hat{\vartheta}_j$ είναι ΕΜΠ της παραμέτρου της κατανομής.

17. Έστω X τ.μ από την $N(\vartheta,1)$. Ορίζουμε και την τ.μ I ως εξής

$$I:=\begin{cases}1, X>0\\ 0, X\le 0\end{cases}$$

Λαμβάνουμε ένα δείγμα μεγέθους n. Αν $i=\dfrac{n}{8}$ η τιμή της I στο δείγμα να βρεθεί ο ΕΜΠ της $\Pr(X>0)$

> **Εκτίμηση σε διάστημα**

1. Έστω τ.δ από $P(\vartheta)$.Να βρεθεί ένα ασυμπτωτικό δ.ε για την παράμετρο της κατανομής.

2. Έστω τ.δ από $\mathrm{Bt}(1,\vartheta),\vartheta > 0$ Να βρεθεί δ.ε για την παράμετρο της κατανομής.

3. Έστω τ.δ από $\mathcal{U}(\vartheta,\beta),\vartheta < \beta$. Να βρεθεί .δ.ε για την παράμετρο της κατανομής.

4. Έστω δύο ανεξάρτητα δείγματα από Weibull με παραμέτρους ϑ_1,ϑ_2 άγνωστες και γ_1,γ_2 γνωστές.. Να βρεθεί δ.ε για την $g(\vartheta_1,\vartheta_2) = \dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_2}$.

5. Για δύο ανεξάρτητα τ.δ από $B(1,p_1)$ και $B(1,p_2)$ να βρεθεί ασυμπτωτικό δ.ε για την $g(p_1,p_2) = p_2 - p_1$.

6. Έστω τ.δ από κατανομή με σ.π.π την $f(x;\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{2}\exp(-\vartheta|x|), x \in \mathbb{R}, \vartheta > 0$

A. Δείξτε ότι η σ.σ $T(\underset{\sim}{X}) = 2\vartheta\sum|X| \sim \chi^2_{2n}$

B. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο ϑ .

7. Έστω τ.δ από κατανομή με σ.π.π την $f(x;\vartheta) = \gamma x^{p-1}\exp(-\vartheta r), x,\vartheta,p > 0$

i. Να βρεθεί το γ .
ii. Να βρεθεί η κατανομή του X^r .
iii. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο ϑ .

8. Έστω τ.δ από κατανομή με σ.π.π την $f(x;\vartheta) = \vartheta x^{\vartheta-1}, x \in (0,1)$. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο ϑ .

9.

A. Έστω τ.δ από $\mathcal{G}(\vartheta,\beta),\vartheta,\beta > 0$ και β γνωστό. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο a

B. Έστω τ.δ από κατανομή με σ.π.π την $f(x;\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta}\exp\left(-\dfrac{x-\beta}{\vartheta}\right), x > \beta, \vartheta > 0$.

i. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο ϑ όταν β γνωστό
ii. Να κατασκευαστεί δ.ε για την παράμετρο β όταν ϑ γνωστό